



TITLE:

極小モデルと退化

AUTHOR(S):

角田, 秀一郎

CITATION:

角田, 秀一郎. 極小モデルと退化. 代数幾何学シンポジウム記録 1983, 1983: 168-176

ISSUE DATE:

1983

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/212631>

RIGHT:

極小モデルと退化

阪大 角田秀一郎

§1. はじめに, 1981年域ノム奇ニホニツム における筆者の拙文に誤りがありましたので, 訂正させていただきます.

非特異射影多様体 X と非特異曲線 Δ との間の全射 $\pi: X \rightarrow \Delta$ で次の条件を満たすものを考えます:

(i) $\pi^{-1}(P)$ は, reduced で連結, かつ単純正規交叉, $\pi^{-1}(P) \cap \Delta$ は Δ の任意の点,

(ii) $\pi^{-1}(P)$ の非特異ファイバーは, $\pi^{-1}(P)$ の標準因子 $K(\pi^{-1}(P))$ は nef.

この条件のもとで, 結論は次の通り.

定理. 正規射影多様体 X と双有理写像 $\varphi: X \rightarrow Y$ があって

(i) $\pi := \pi \circ \varphi^{-1}$ は正則写像,

(ii) φ は特異ファイバーが外で同型,

(iii) Y は高々 terminal 特異点 (定義については, 本報告集川又氏の論文参照),

(iv) $K(Y)$ は π^{-1} に関して, 相対的に nef.

前の拙著において, Y が満たすべき特異点の範囲についていた. これから, この特異点について説明します.

そのために, 2つの概念を導入します (実は本質的に同じものです).

定義1. $\pi: X \rightarrow \Delta$ は前の通りとします. 双有理写像の列

$$X = Y_n \xrightarrow{f_n} Y_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} Y_{n-2} \cdots \rightarrow Y_1 \xrightarrow{f_1} Y_0 = Y$$

以下の条件を満たすとする:

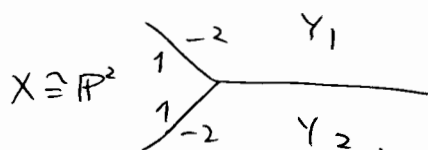
- (1) f_i は \mathcal{O}_i のある特異ファイバーに属する素因子 D_i を、点 π_i について、
- (2) $-K(\mathcal{O}_i)|_{D_i}$ は ample であり、
 $\ker(\mathrm{Pic}(\mathcal{O}_i) \otimes \mathbb{Q}) \rightarrow \mathrm{Pic}(D_i) \otimes \mathbb{Q} = 1$,
- (3) X が "ある \mathcal{O}_i の特異ファイバー F の素因子" であれば、
 $(X, F-X)|_X$ は高々 \log -terminal 特異点、
 X の 全 proper transform は, minimal resolution.

このとき、 \mathcal{O}_i は高々特別 \log -terminal 特異点をもつと定義します。この定義について少し注意すると、まず、(1) の条件から帰納的に、 π から誘導される有理写像は必ずしもなることがわかります。 (2) の条件からこれも帰納的に \mathcal{O}_i がすべて \log -terminal 特異点のみもつことがわかり、したがって (2) も意味をもちます。

(1), (2) は、 \log -terminal 特異点に対する条件としてそれほど強いものではありません (この報告集の川又氏、森氏の論文参照)。

次に特別 \log -terminal 特異点の例を上げます。実は、これらから、ある意味で特別 \log -terminal 特異点を特徴づけられます。

例 1. π, π を上の通りとせ、 F を特異ファイバーとします。以下 π の記号を使います。 F が $F = X + Y_1 + Y_2 + Z$ という分解をもつと仮定します。ここで、 X, Y_1, Y_2 は既約で、 Z は残りです。ここで、 X は \mathbb{P}^2 と同型で、 X, Y_1, Y_2, Z の configuration は次の図のようだとします:



$\equiv \mathbb{P}^2$ — は double curve, double curve の
両方きの数はそれぞれその double curve を含む素因子
(既約曲面) 内での交点数とあじわいます。

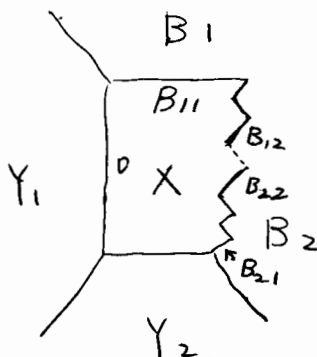
つまり, 言葉で書けば, X は, Y_1, Y_2 との 2 交わり
の交わりは \mathbb{P}^2 の line で, Y_1, Y_2 内では X の決める
double curve は -2 の自己交点数とあじわいます。

このとき, X の contraction は, 特別 terminal
特異点とあじわいます。これが容易に check されます。

これをもとに, orbifold type の特異点と定義します。
つまり, 例 1 の特異点は, orbifold type とします。
次に帰納的に次のように orbifold type と定義する。

例 2. $F = B_1 + B_2 + X + Y_1 + Y_2 + Z$ を, F の分解で
次のようなものとします:

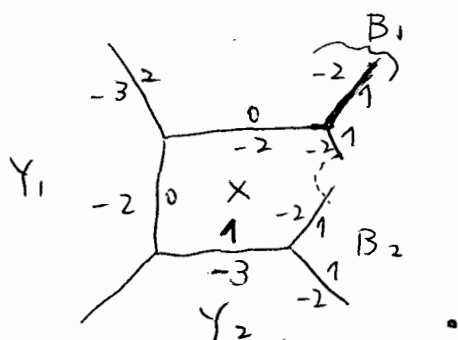
B_1, B_2 は, orbifold type の特異点と定義し,
 X, Y_1, Y_2 は既約, Z は残りとします。また, B_1, B_2 ,
 X, Y_1 と Y_2 の配列は, 次の通り:



$\equiv \mathbb{P}^2$, \dots は $\underbrace{B_2 \neq 0 \text{ のとき}}_{(-1) \text{ curve}} \left(\underbrace{B_2 = 0 \text{ のとき}}_{0\text{-curve}} \right)$,

言葉で書けば, B_1 は, X と Y_1 にのみ交わり,
 B_2 は X と Y_2 に交わり, X は 有理曲面 で, ある
 ruling に對して, fibers に沿つた (-1) curve だ"
 高々 1 本 と します. 二つ, $Y_1' \subset Y_1/X$, $Y_2' \subset Y_2/X$
 $B_1' \subset B_1/X$, $B_2' \subset B_2/X$ と 記せば, Y_1' は 上の ruling に對する
 fibers, Y_2' は section. B_1' と B_2' は 帰納
 的に, linear chain で "ある" ことが わかります,
 1 本 だけ, B_1' (resp. B_2') は 二つの 端成分 B_{11} , B_{12}
 (resp. B_{21} , B_{22}) を もつ ます. 二つ, B_{11} は Y_1
 と 交わり, B_{21} は Y_2 と 交わり と します. すると,
 B_{11} は section だ, Y_2' と は 交か します, $B_1' - B_{11}$
 と B_2' と (-1) curve だ, X の ruling に 對する
 特異ファイバー を 構成し, (-1) curve は B_{12} と B_{22}
 に 交わり.

この場合, $B_1 + B_2 + X$ は 特別 terminal 特
 異点 につきます "ある" できます. 二つを orbifold
 type の 特異点 と します. 以下例を 書いて みます
 と,



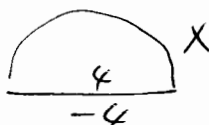
次に, nod type の 特異点 を 定義 します.

例 3. $F = Y + X + Z$ の 分解 だ, X は
 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の \mathbb{P}^2 だ, X は Y のみ と 交わり,

$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ には double curve 1本, 自己交点数 2をもつ非特異有理曲線系, \mathbb{P}^2 には, conic.



Y

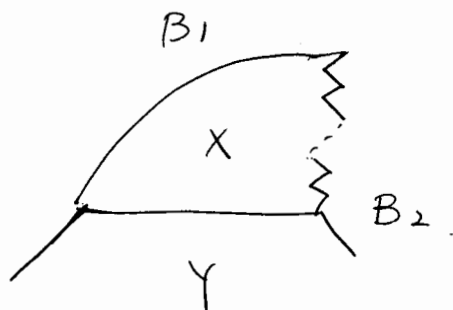


Y

とあるとき, X は特別 terminal sing を定義する, conical type のときと同様に, 帰納的に, nodal type を定義する. 実際, 例3の特異点は nodal type である.

例4. $F = B_1 + B_2 + X + Y + Z$ の二次の因子分解とする:

- (i) B_1, B_2 は conical type の特異点で定義し, X は有理曲面で, ある ruling に沿って,
- (ii) B_1, B_2, X, Y の配列は二次の通り,



すなわち, $B'_1 = B_1/X$, $B'_2 = B_2/X$, $Y' = Y/X$ とおけば, Y' は \mathbb{P}^1 の ruling に沿って, section となり, B'_1 の Y' 交わる component (曲線) がまた section であり, B'_1 の残りと B'_2 とは (ii) curve が特異点であり, 二次

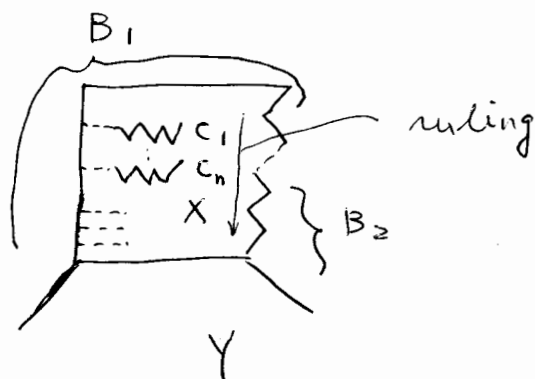
構成は, H 上面に, B_1, B_2 の edge component と交わる.

そこで, $B_1 + B_2 + X$ の contraction は特別に *termined*, 特異点と取り出す. 二枚も *red type* の u と v を定義する.

例 5. $F = B_1 + B_2 + X + Y + C_1 + \dots + C_n + Z$
 $Z = \text{Zeros of } \Delta$ とする;

i) B_1, B_2 は *red type* の特異点を定め, C_1, \dots, C_n は *red type* の特異点で, $C_1/X, \dots, C_n/X$ は *cyclic* 有理二重点の *minimal resolution* とし,

ii) $B_1 + B_2 + X + Y + C_1 + \dots + C_n$ の配列は次の通り;



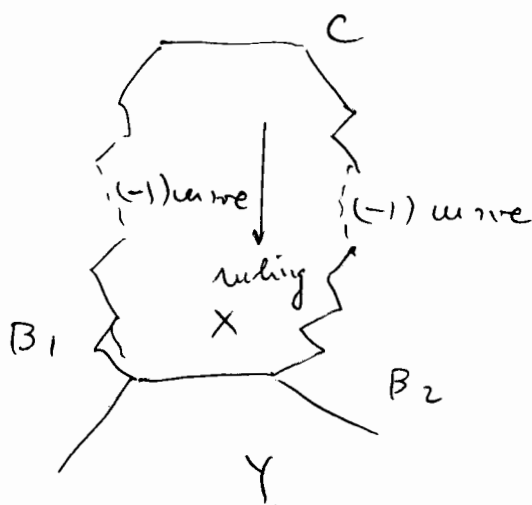
$Y' = Y/X$, $B_1' = B_1/X$, $B_2' = B_2/X$, $C_i' = C_i/X$
 とおく. B_1, B_2 とともに X, Y と交わる. X は H の *ruling* とする. B_1' の edge component で Y と交わる曲線と C_1, \dots, C_n と H の (-1) curve が H の fiber を作る. H は T の (-1) curve であり B_1' の edge component と交わる. また, H の edge component と交わる. B_1' の component は *section* とする, u, v の

Component $\varepsilon_{A(-1)}$ curve ε B_1 が B_1 の fiber を構成する。 B_1 の B_1 の edge component ε (-1) curve が交わり, B_2 の edge component ε Y と交わり Y が (-1) curve と交わる。 Y' は section. ~~curve~~.

このとき, $B_1 + B_2 + C_1 + \dots + C_n + X$ は, 特別 terminal 特異点を定義し, これを nodal type の特異点と定めます,

例 6. $F = B_1 + B_2 + C + X + Y + Z$ を ε の ε を分解とします; ~~curve~~.

- (i) B_1, B_2 は unbel type の特異点,
- (ii) C は nodal type の特異点,
- (iii) $B_1 + B_2 + C + X + Y$ の ε は ε と交わり;



言葉での説明は略す。

~~この場合~~ $B_1 + B_2 + C + X$ の contraction は, 特別 terminal sang. とおきます,

例 3~例 6 の特殊点の "nod type" の特殊点です。最後に, exceptional type の特殊点を定義します。 P を特別 terminal 特殊点で, P は double curve に含まれないとします。このとき, P は "有理二重点で", cyclic sing. でないとするとき, P は exceptional type の特殊点と呼びます。次の命題の定理の証明のうちの key になります。

命題 特別 terminal sing. は, corbel type, nod type, exceptional type の特殊点となる, すなわち, ある resolution π とすると, $\pi(P)$ の性質と一致する。

証明の方針は, 前の報告と同様で略し, 以下域の奇点で話したことの補足等をしてみたいと思います。

§2. V を射影代数多様体とします。 V は高々 terminal 特殊点のみを許すとします。極小モデルの存在がわかれています。次の 2 つの case を V の研究に帰着させます (= これについては "又氏の論文を参照してください") :

case 1. $-K_V$ が ample

case 2. K_V が nef.

Case 1 については予想されることは, 次のです
 予想 1. $-K_V$ が ample であらば, V は rationally connected, すなわち, V の任意の 2 点 は rational curve の chain で結ばれる。

この予想に関して、次の定理があります。

定理(森, Kollar) V が "非特異" であれば, V の任意の点を通る有理曲線が存在する。

Case 2 について予想 1 が成り立つとは、
予想 2, ある $m > 0$ が存在して, $m K_V$ が
global sections で生成される。

この予想に関して、知られていゝことは、非常に多く、
一般次元では次の川又氏による2つの定理が知られてゐる、
定理. case 2 の仮定のもとで、

- (i) K_V が "numerically trivial".
- (ii) $K_V^n > 0$ $n = \dim V$

のいずれかが満たせば、予想 2 は正しく、ただ
指標数は 0 とする。

興味ある問題としては指標数が正の時、この定理
は成り立つのかというものが残っています、また予想 2 の
弱い形の次もまだ解けていません。

予想 2': case 2 の仮定のもとで, $K(V) \geq 0$,
つまり K は 1 年次元です。

この予想 2' について、3次元の場合に, $\chi(V, \mathcal{O}_V) \leq 0$
がわかれば、予想 2' が OK、ということが、わかっ
ています。